REDUCTION

AF EN CLASSE AF INTEGRALER BESLÆGTEDE MED DE ELLIPTISKE

VED

C. RAMUS,

PROFESSOR I MATHEMATIKEN VED KJÖBENHAVNS UNIVERSITET.

Ifölge den vedtagne Betegnelse være

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\Pi^k = \int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)^k\,\Delta}$$

hvor Modulus c er positiv ei > 1, Parametren n er hvilkensomhelst reel eller imaginær, k er et heelt Tal, Amplituden φ er positiv og kan stedse antages at være ikke $> \frac{\pi}{2}$. For Π^k haves en Reductionsformel funden ved Differentiation og Integration (*Traité des fonctions elliptiques* T. I Pag. 12), og som kan skrives under fölgende Form:

$$(1) \quad \frac{\Delta \sin \varphi \cos \varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)^{k-1}} = \begin{cases} (2\,k-2)\left(1 + \frac{1+c^2}{n} + \frac{c^2}{n^2}\right)\Pi^k \\ -(2\,k-3)\left(1 + \frac{2(1+c^2)}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right)\Pi^{k-1} \\ +(2\,k-4)\left(\frac{1+c^2}{n} + \frac{3\,c^2}{n^2}\right)\Pi^{k-2} \\ -(2\,k-5)\,\frac{c^2}{n^2}\,\Pi^{k-3} \end{cases}$$

Herved kunne alle Functioner Π^k, baade for positive og negative Værdier af k, reduceres til de tre elliptiske Functioner

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta\, d\varphi, \quad \Pi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta},$$

men Reductionen for negative Værdier, som kun leder til de to förste Functioner, kan ogsaa udföres ved den simplere Reductionsformel, som haves (l. c.) for $\int_0^{\varphi} \frac{\sin^{2k}\varphi\, d\varphi}{\Delta}$.

Den elliptiske Function af 3die Art $\Pi(\varphi)$, som erholdes af Π^k ved $k = 1$, kan ikke reduceres ved Formlen (1), efterdi dens Coefficient forsvinder, nemlig $2k - 2 = 0$, og den maa derfor constituere en egen Transcendent for sig. Det er imidlertid at bemærke, at idet det Led, som indeholder Π^k, for $k = 1$ bortgaaer af Ligningen, maae de andre Led særskilt hæve hinanden, altsaa Π^k vil for $k = 1$ fremstille sig under den ubestemte Form $\frac{0}{0}$, hvis sande Værdie kan bestemmes ved Differentiation efter den sædvanlige Regel. Sættes $k - 1 = x$, erholdes ifölge (1) ved at antage $x = 0$

$$2\left(1 + \frac{1+c^2}{n} + \frac{c^2}{n^2}\right)\Pi(\varphi) =$$

$$\frac{1}{x}\left\{\begin{array}{l} \frac{\Delta \sin\varphi\cos\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^x} + (2x-1)\left(1 + \frac{2(1+c^2)}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right)\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^x\Delta} \\ -(2x-2)\left(\frac{1+c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right)\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^{x-1}\Delta} + (2x-3)\frac{c^2}{n^2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^{x-2}\Delta} \end{array}\right.$$

altsaa

$$2\left(1 + \frac{1+c^2}{n} + \frac{c^2}{n^2}\right)\Pi(\varphi) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta\sin\varphi\cos\varphi\log(1+n\sin^2\varphi) + 2\left(1 + \frac{2(1+c^2)}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right)F(\varphi) \\ +\left(1 + \frac{2(1+c^2)}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right)\int_0^{\varphi}\log(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta} - 2\left(\frac{1+c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right)\int_0^{\varphi}(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta} \\ -2\left(\frac{1+c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right)\int_0^{\varphi}(1+n\sin^2\varphi)\log(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{2c^2}{n^2}\int_0^{\varphi}(1+n\sin^2\varphi)^2\frac{d\varphi}{\Delta} \\ +\frac{3c^2}{n^2}\int_0^{\varphi}(1+n\sin^2\varphi)^2\log(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta} \end{array}\right.$$

eller, ved at reducere til elliptiske Functioner de af Integralerne, som dertil ere reducible, nemlig:

$$\int_0^{\varphi}(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta}=\left(1+\frac{n}{c^2}\right)F(\varphi)-\frac{n}{c^2}E(\varphi)$$

$$\int_0^{\varphi}(1+n\sin^2\varphi)^2\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{n^2}{3c^2}\Delta\sin\varphi\cos\varphi+\left[\frac{n^2(2+c^2)}{3c^4}+\frac{2n}{c^2}+1\right]F(\varphi)-\frac{2n}{c^2}\left(1+\frac{n(1+c^2)}{3c^2}\right)E(\varphi)$$

erholdes:

$$(2)\quad 2\left(1+\frac{1+c^2}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi(\varphi)=\begin{cases}\Delta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{2}{3}-\log(1+n\sin^2\varphi)\right)\\ +\left[\frac{2c^2}{n^2}(1+n)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1-c^2}{c^2}\right]F(\varphi)\\ +\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1+c^2}{c^2}+\frac{2}{n}\right]E(\varphi)+\int\log(1+n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta}\\ -2(1+c^2)\int\log(1+n\sin^2\varphi)\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}\\ +3c^2\int\log(1+n\sin^2\varphi).\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta}\end{cases}$$

idet Grændserne for Integrationerne her som bestandigen i det Fölgende ere o og φ. Rigtigheden af denne Formel er let at pröve i det specielle Tilfælde $n=o$, som giver $\Pi(\varphi)=F(\varphi)$, idet alle Led gaae bort undtagen de som indeholde n^2 i Nævneren. For $n=-1$ giver den

$$o=\Delta\sin\varphi\cos\varphi\left(\tfrac{1}{3}-\log\cos\varphi\right)-\tfrac{1}{3}.\frac{1-c^2}{c^2}F(\varphi)+\tfrac{1}{3}.\frac{1-2c^2}{c^2}E(\varphi)+$$

$$(3)\quad\begin{cases}\int\log\cos\varphi.\frac{d\varphi}{\Delta}\\ -2(1+c^2)\int\log\cos\varphi.\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}\\ +3c^2\int\log\cos\varphi.\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta}\end{cases}$$

og for $n=-c^2$ giver den

$$o = \Delta \sin\varphi \cos\varphi (\tfrac{1}{3} - \log\Delta) + \tfrac{2}{3}.\frac{1-c^2}{c^2} F(\varphi) - \tfrac{1}{3}.\frac{2-c^2}{c^2} E(\varphi) +$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \log\Delta.\frac{d\varphi}{\Delta} \\ -2(1+c^2) \int \log\Delta.\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} \\ +3c^2 \int \log\Delta.\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta} \end{array} \right.$$

Af disse to Ligninger (3) og (4) erholdes fölgende Udtryk for de elliptiske Functioner af 1ste og 2den Art:

$$(5) \quad F(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \sin\varphi \cos\varphi \left(1 - \frac{2-c^2}{1-c^2} \log\cos\varphi - \frac{1-2c^2}{1-c^2} \log\Delta\right) \\ + \frac{2-c^2}{1-c^2} \int \log\cos\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{1-2c^2}{1-c^2} \int \log\Delta.\frac{d\varphi}{\Delta} \\ -2\frac{(1+c^2)(2-c^2)}{1-c^2} \int \log\cos\varphi.\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} - 2\frac{(1+c^2)(1-2c^2)}{1-c^2} \int \log\Delta \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} \\ +3\frac{c^2(2-c^2)}{1-c^2} \int \log\cos\varphi \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta} + 3\frac{c^2(1-2c^2)}{1-c^2} \int \log\Delta.\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta} \end{array} \right.$$

$$(6) \quad E(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \sin\varphi \cos\varphi (1 - 2\log\cos\varphi - \log\Delta) \\ +2 \int \log\cos\varphi.\frac{d\varphi}{\Delta} + \int \log\Delta.\frac{d\varphi}{\Delta} \\ -4(1+c^2) \int \log\cos\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} - 2(1+c^2) \int \log\Delta.\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} \\ +6c^2 \int \log\cos\varphi.\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta} + 3c^2 \int \log\Delta.\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta} \end{array} \right.$$

saa at $F(\varphi)$ og $E(\varphi)$ ere oplöste i de sex Integraler:

$$\int \log\cos\varphi.\frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad \int \log\cos\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}, \qquad \int \log\cos\varphi \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta}$$

$$\int \log\Delta.\frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad \int \log\Delta \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}, \qquad \int \log\Delta.\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

af hvilke de tre sidste kunde henföres under de tre förste, hvis man vilde antage Modulus > 1, thi ved at sætte $c \sin \phi = \sin \psi$ bliver $\log \Delta . \frac{d\phi}{\Delta}$ transformeret til $\frac{1}{c} \log \cos \psi . \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sin^2 \psi}}$. Substitueres Udtrykkene (5) og (6) i Ligning (2), erholdes den tredie elliptiske Function $\Pi(\phi)$ udtrykt ved de samme 6 Integraler og desuden ved disse tre

$$\int \log (1 + n \sin^2 \varphi) . \frac{d\varphi}{\Delta}, \int \log (1 + n \sin^2 \varphi) . \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\Delta}, \int \log (1 + \sin^2 \varphi) . \frac{\sin^4 \varphi \, d\varphi}{\Delta}.$$

For $c^2 = \frac{1}{2}$ kommer $F(\phi)$ ifölge (3) eller (5) kun til at afhænge af de tre förste af de 6 nævnte Integraler; og i samme Tilfælde veed man, at denne Function har mange mærkelige Egenskaber.

Af (5) og (6) findes fölgende Udtryk for Differentsen mellem de to förste elliptiske Functioner

$$(7) \qquad F(\phi) - E(\phi) =$$

$$\frac{c^2}{1-c^2} \Big\{ \Delta \sin \varphi \cos \varphi \log \frac{\Delta}{\cos \varphi} - \int \log \frac{\Delta}{\cos \varphi} . \frac{d\varphi}{\Delta} + 2(1 + c^2) \int \log \frac{\Delta}{\cos \varphi} . \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\Delta}$$
$$- 3c^2 \int \log \frac{\Delta}{\cos \varphi} . \frac{\sin^4 \varphi \, d\varphi}{\Delta} \Big\}.$$

Derimod Summen af disse to Functioner kan almindeligen kun udtrykkes ved de 6 Integraler, som indgaae i (5) og (6); men man kan bemærke, at i det specielle Tilfælde hvor Modulus $c = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sin 54^\circ \, 44' \, 8'', 0$, vil denne Sum ifölge (3) kun komme til at afhænge af de tre i denne Formel indgaaende Integraler, nemlig

$$(8)\quad F(\sqrt{\tfrac{2}{3}},\varphi)+E(\sqrt{\tfrac{2}{3}},\varphi)=\begin{cases}\Delta\sin\varphi\cos\varphi\,(2-6\log\cos\varphi)+6\int\log\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{\Delta}\\ -20\int\log\cos\varphi.\,\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}+12\int\log\cos\varphi.\,\frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{\Delta}\end{cases}$$

hvor $\Delta=\sqrt{1-\tfrac{2}{3}\sin^2\varphi}$.

Den Classe af Functioner, ved hvilke de elliptiske formedelst de foregaaende Ligninger kunne udtrykkes, er indbefattet under den almindelige Form

$$(9)\qquad \int Q\log(1+n\sin^2\varphi).\,\frac{d\varphi}{\Delta}$$

hvor Q er en rational lige Function af sin φ. Dette Integral tilstæder Reductioner analoge med dem, hvorved

$$(10)\qquad \int Q\,\frac{d\varphi}{\Delta}$$

bliver transformeret deels til de forhen bekjendte Functioner deels til de tre Arter af elliptiske.

Ved at differentiere Ligning (1) med Hensyn til k og sætte

$$(11)\quad \mathfrak{Q}^k=\int\frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{(1+n\sin^2\varphi)^k}.\,\frac{d\varphi}{\Delta}$$

erholdes

$$-\frac{\Delta \sin\varphi \cos\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^k}\log(1+n\sin^2\varphi)=$$

$$(12)\left\{\begin{array}{l}2\left[\left(1+\frac{1+c^2}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi^k-\left(1+\frac{2(1+c^2)}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\Pi^{k-1}+\left(\frac{1+c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\Pi^{k-2}-\frac{c^2}{n^2}\Pi^{k-3}\right]\\ -(2k-2)\left(1+\frac{1+c^2}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\mathfrak{Q}^k+(2k-3)\left(1+\frac{2(1+c^2)}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\mathfrak{Q}^{k-1}\\ -(2k-4)\left(\frac{1+c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\mathfrak{Q}^{k-2}+(2k-5)\frac{c^2}{n^2}\mathfrak{Q}^{k-3}\end{array}\right.$$

som ved at sætte $k = 1$ reproducerer Formlen (2). Almindeligen bliver formedelst (12) Functionen Ω^k reduceret deels til de forhen bekjendte Functioner, de elliptiske med indbefattede, deels til Integralerne Ω^1, Ω^0, Ω^{-1} eller, hvad der er det samme, til

$$(13)\quad \int \frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{1+n\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta},\ \int \log(1+n\sin^2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta},\ \int \log(1+n\sin^2\varphi).\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}.$$

For fuldstændigen at reducere Formen (9), maa man endnu betragte fölgende tre Integraler

$$(14)\quad \int \log(1+n\sin^2\varphi).\frac{\sin^{2p}\varphi\, d\varphi}{\Delta},\ \int \frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{\sin^{2p}\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta},\ \int \frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{(1+r\sin^2\varphi)^k}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta},$$

hvor p kan være et hvilketsomhelst positivt heelt Tal, og r ligesom n kan være reel eller imaginær. Det tredie af disse Integraler indbefatter (11) som specielt Tilfælde idet $r = n$. Det förste derimod kan fuldstændigen udtrykkes ved Hjælp af (11) og derfor ogsaa reduceres ved Ligning (12), men behandles dog lettere i Forbindelse med det andet Integral paa fölgende Maade. Man sætte

$$\int \log(1+n\sin^2\varphi).\frac{\sin^{2p}\varphi\, d\varphi}{\Delta} = U^{2p},$$

og man vil ved Differentiation og Integration finde

$$(15)\quad \Delta\cos\varphi\sin^{2p-3}\varphi\log(1+n\sin^2\varphi) = \begin{cases} 2n\int \dfrac{\sin^{2p-2}\varphi-(1+c^2)\sin^{2p}\varphi+c^2\sin^{2p+2}\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{\Delta} \\ +(2p-3)U^{2p-4}-2(p-1)(1+c^2)U^{2p-2}+(2p-1)c^2U^{2p} \end{cases}$$

Denne Formel kan tjene til at reducere de to förste Functioner (14) eller U^{2p} og U^{-2p} deels til de simple Functioner i Forbindelse med de elliptiske deels til de to sidste Functioner (13). Naar enten $n = -1$ eller $n = -c^2$, ville de elliptiske Functioner, som fremkomme ved Reductionen, kun være af 1ste og 2den Art, og man vil ved $p = 2$ komme tilbage til Formlerne (3) og (4).

Den tredie Form (14) være betegnet ved R^k, og den reduceres ved fölgende Formel, som findes ved Differentiation og Integration:

$$(16)\quad \frac{\Delta \sin\varphi\cos\varphi}{(1+r\sin^2\varphi)^{k-1}}\log(1+\sin^2\varphi) = \begin{cases} \alpha R^k + \beta R^{k-1} + \gamma R^{k-2} + \delta R^{k-3} \\ + 2n\int \frac{\sin^2\varphi - (1+c^2)\sin^4\varphi + c^2\sin^6\varphi}{(1+r\sin^2\varphi)^{k-1}(1+n\sin^2\varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} \end{cases}$$

idet

$$\alpha = (2k-2)\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{c^2}{r}\right)$$

$$\beta = -(2k-3)\left(1+\frac{2(1+c^2)}{r}+\frac{3c^2}{r^2}\right)$$

$$\gamma = (2k-4)\left(\frac{1+c^2}{r}+\frac{3c^2}{r^2}\right)$$

$$\delta = -(2k-5)\frac{c^2}{r^2}$$

som ogsaa ligefrem af Formlen (1) kan udledes. Herved blive alle Functioner R^k reducerede deels til de forhen bekjendte Functioner, de elliptiske med indbefattede, deels til de to sidste Functioner (13) og til R^1, hvorunder den förste Function (13) er indbefattet ved at sætte $r = n$; men i de to Tilfælde $r = -1$ og $r = -c^2$, som gjöre $\alpha = 0$, reduceres R^k til U^0, U^2 og elliptiske Functioner, idet man finder:

$$\int \frac{\log(1+n\sin^2\varphi).\,d\varphi}{\cos^2\varphi.\,\Delta} = \begin{cases} \frac{c^2}{b^2}(U^2-U^0) - \frac{2}{b^2}\left(\frac{c^2}{n}F + E - \frac{n+c^2}{n}\Pi(n)\right) \\ +\frac{1}{b^2}\Delta\,\mathrm{tg}\,\varphi\log(1+n\sin^2\varphi), \end{cases}$$

$$\int \frac{\log(1+n\sin^2\varphi).\,d\varphi}{\Delta^3} = \begin{cases} \frac{c^2}{b^2}\left(U^2 - \frac{1}{c^2}U^0\right) + \frac{2c^2}{b^2}\left(\left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{1}{n}\right)F - \frac{1}{c^2}E + \frac{1+n}{n}\Pi(n)\right) \\ +\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi\log(1+n\sin^2\varphi)}{b^2\Delta}, \end{cases}$$

idet $b^2 = 1 - c^2$.

Det er altsaa beviist, at den almindelige Form (9) indbefatter ingen andre Functioner end deels de forhen bekjendte Functioner i Forbindelse med de elliptiske, deels disse tre Integraler

$$(17)\quad \int \log(1+n\sin^2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta},\ \int \log(1+n\sin^2\varphi).\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta},\ \int \frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{1+r\sin^2\varphi}.\frac{d\varphi}{\Delta},$$

som kunne betragtes som indbefattede i den ene Form

$$(18)\quad G(\varphi) = \int \frac{A+B\sin^2\varphi}{1+r\sin^2\varphi}\log(1+n\sin^2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Denne Function kan nemlig fuldstændig udtrykkes ved de tre Functioner (17); som ere U^0, U^2, R^1, saaledes:

$$G(\varphi) = \frac{B}{r}U^0 + \frac{Ar-B}{r}R^1,$$

hvori U^2 ikke indgaaer, men hvor det tillige maa forudsættes at ikke $r = o$, i hvilket Tilfælde man vil have

$$G(\varphi) = AU^0 + BU^2,$$

hvori R^1 ikke indgaaer. $G(\varphi)$ vil i specielle Tilfælde kunne reduceres til en hvilkensomhelst af de tre Functioner (17), nemlig

for $A = 1$, $B = 0$, $r = 0$ haves $G(\phi) = U^0$,
for $A = 0$, $B = 1$, $r = 0$ haves $G(\phi) = U^2$,
for $A = 1$, $B = 0$ haves $G(\phi) = R^1$.

Iövrigt kunde Inddelingen af $G(\phi)$ i tre Classer skee paa uendelig mange Maader; vilde man fölge Analogien med de elliptiske Functioners Inddeling, vilde fölgende tre Classer opstaae:

$$\int \log(1+n\sin^2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta}, \int \log(1+n\sin^2\varphi).\Delta d\varphi, \int \frac{\log(1+n\sin^2\varphi)}{1+r\sin^2\varphi}.\frac{d\varphi}{\Delta},$$

som fuldkomment svare til de elliptiske Functioner af 1ste, 2den og 3die Art, og erholdes af disse ved blot at tilföie Factoren $\log(1+n\sin^2\phi)$ under Integral-Tegnene.

Hvis i Formen (9) Q betyder en hvilkensomhelst rational Function af $\sin\phi$, kan man sætte

$$Q = M + N\sin\varphi,$$

hvor M og N ere lige rationale Functioner af $\sin\phi$, hvorved Integralet deles i to Dele, af hvilke den förste behandles som ovenfor, og den anden Deel er

$$H(\phi) = \int N\sin\varphi\log(1+n\sin^2\varphi).\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Ved heri at sætte $\Delta = u - c\cos\phi = \frac{u^2+b^2}{2u}$, $\cos\varphi = \frac{u^2-b^2}{2cu}$, og ved at oplöse $1+n\sin^2\phi$ i sine Factorer, erholdes $H(\phi)$ udtrykt ved Integraler af den Form

$$\int U \log(\alpha + \beta u) . \, udu$$

hvor U er en rational Function af u^2, og α og β ere Constanter, som kunne være reelle eller imaginære. Man kan fremdeles sætte $\alpha + \beta u = z$, og decomponere den rationale Factor under Integral-Tegnet, hvorved erholdes de tre Former

$$\int z^m \log z . \, dz, \int \frac{\log z}{z^m} . \, dz, \int \frac{\log z}{(a+bz)^m} \, dz,$$

hvor m er et positivt heelt Tal, a og b reelle eller imaginære Constanter. Ved deleviis Integration kunne disse let bringes deels til algebraiske og logarithmiske Functioner, deels til den irreducttible Transcendent

$$(19) \qquad \int \frac{\log z}{a+bz} \, dz$$

(s. *Lacroix*, *Traité du calcul diff. et du calcul intégr.* T. II. Pag. 86).

Man seer altsaa, at de to Arter af Functioner, hvortil Formen (9) leder, naar Q er en hvilkensomhelst rational Function af $\sin\varphi$ og oplöses i M og N $\sin\varphi$, ere væsentligen forskjellige fra hinanden. Den ene Art, som M giver, leder til elliptiske Functioner og til de tre Functioner (17) eller Functionen (18); den anden Art, som N $\sin\varphi$ giver, leder til de simple Transcendenter og til den nye (19). Dette er analogt med den almindelige Reduction af Formen (10), hvoraf den ene Deel giver de tre elliptiske Functioner, den anden Deel giver blot de simple Transcendenter.

Til Formen (9) kan ethvert Integral af Formen

$$(20) \qquad \int S \log T . \, \frac{dx}{R}$$

blive transformeret, idet S og T ere hvilkesomhelst rationale Functioner af x, og $R = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$; dette skeer ved de samme Methoder, hvorved

$$\int S \frac{dx}{R}$$

bringes til Formen (10), idet man nemlig decomponerer T i alle dets enkelte Factorer og Divisorer og derved log T i Logarithmerne af disse.

Naar i de tre Functioner (17), som vi have betegnet ved U^0, U^2 og R^1, Parametren n betragtes som variabel, medens de andre Elementer φ, c og r ere constante, erholdes ved Differentiation

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{dU^0}{dn} = \dfrac{1}{n}\left(F - \Pi\ (n)\right) \\[2ex] \dfrac{dU^2}{dn} = \dfrac{n - c^2}{c^2 n^2} F - \dfrac{1}{c^2 n} E + \dfrac{1}{n^2} \Pi\ (n) \\[2ex] \dfrac{dR^1}{dn} = \dfrac{1}{n-r}\left(\Pi\ (r) - \Pi\ (n)\right) \end{cases}$$

og ved Integration

$$(22)\quad \begin{cases} \int U^0 dn = U^{-2} + n\left(U^0 - F\right) \\[1ex] \int U^2 dn = n U^2 + U^0 - \dfrac{n}{c^2}\left(F - E\right) \\[1ex] \int R^1 dn = (n-r) R^1 + U^{-2} - n\ \Pi\ (r) \end{cases}$$

og mere almindeligt ved at gaae ud fra Formlen (18) erholdes

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{dG(\varphi)}{dn} = \dfrac{B}{nr} F + \dfrac{B - nA}{n(n-r)} \Pi\ (n) - \dfrac{B - rA}{r(n-r)} \Pi\ (r) \\[2ex] \int G(\varphi)\, dn = n G(\varphi) + A U^{-2} - A n R^1 - n \int \dfrac{A + B \sin^2\varphi}{1 + n \sin^2\varphi} \cdot \dfrac{d\varphi}{\Delta} \end{cases}$$

hvor $\int \frac{A + B\sin^2\phi}{1 + n\sin^2\phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}$ er den almindelige Form, hvori de tre elliptiske Functioner ere indeholdte. Integralerne med Hensyn til n ere alle tagne fra $n = o$. Störrelsen $U^{-2} = \int \frac{\log(1 + n\sin^2\phi)}{\sin^2\phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}$ transformeres ifölge (15) ved at sætte $p = 1$, nemlig

$$U^{-2} = c^2 U^1 + \frac{2}{n}(1+n)(c^2+n)\,\Pi(n) - 2E - \frac{2c^2}{n}(1+n)F - \frac{\Delta}{tg\,\phi}\log(1 + n\sin^2\phi),$$

hvilket Udtryk man seer at være 0 for $n = 0$ (idet man sætter $\Pi(n) = \int \frac{1}{1+n\sin^2\phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta} = \int (1 - n\sin^2\phi)\frac{d\phi}{\Delta}$) hvilket det ifölge Formen for U^{-2} ogsaa nödvendigen maa være.

Disse Formler vise, at de tre Functioner (17), ved at differentieres med Hensyn til Parametren, frembringe elliptiske Functioner, hvilket ogsaa umiddelbart fölger af den Relation

$$\int \Pi(n)\,dn = U^{-2},$$

og at de integrerede med Hensyn til Parametren frembringe deels Functioner af den samme Art deels elliptiske Functioner. Man kan altsaa ogsaa integrere dem successive.

De to förste Ligninger (21) give

$$\frac{dU^0}{dn} + n\frac{dU^2}{dn} = \frac{1}{c^2}(F - E)$$

og ved at multiplicere med dn og integrere

$$U^0 + \int n\frac{dU^2}{dn}dn = \frac{n}{c^2}(F - E)$$

eller ved at integrere deleviis

$$U^0 + nU^2 - \int U^2\,dn = \frac{n}{c^2}(F - E),$$

der er den samme som den anden Ligning (22).